DE SUPERFICIERUM PEDALIUM THEOREMATIBUS QUIBUSDAM.

DISSERTATIO INAUGURALIS

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE

FRIDERICA GUILELMA

PRO

SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE CAPESSENDIS

DIE VII. M. APRILIS A. MDCCCLIX.

H. L. Q. S.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

GODOFREDUS EDUARDUS FISCHER

SAXO-BORUSSUS.

ADVERSARII ERUNT:

LAZARUS FUCHS, PHIL. DOCTOR.
HENRICUS LIEBER, PHIL. CAND.
PAULUS BACHMANN, PHIL. STUD.

BEROLINI

TYPIS EXPRESSIT GUSTAVUS SCHADE.

VIRO

CELEBERRIMO DOCTISSIMO

CAROLO HENRICO SCHELLBACH

PHILOSOPHIAE DOCTORI, PROFESSORI IN GYMNASIO FRIDERICO GUILELMO

PRAECEPTORI CARISSIMO

HASCE

STUDIORUM PRIMITIAS

OFFERT

AUCTOR.

Sicuti locus punctorum, in quibus lineae, curvam datam cuiusvis naturae tangentes, a lineis, normaliter a puncto constante poloque nominato in tangentes illas demissis, secantur, curva pedalis (Fufspunktenkurve) dicitur, simili modo locum quoque punctorum, in quibus plana superficiem quamvis tangentia et lineae, a polo dato in ipsa normaliter deductae, concurrunt, superficiem pedalem (Fufspunktenfläche) appellari cognitum est. Iam cum ex hac definitione cuivis spatii formae superficiem pedalem tribui posse neque minus illas formas quodammodo tamquam superficies pedales habere justum esse pateat, cum itaque affinitatem quoque summa generalitate fruentem inter ipsas constitutam esse constet, quaedam de superficiebus pedalibus theoremata in hoc libello amplius evolvere utile fortasse esse existimo.

Contemplanti autem punctum tamquam sphaeram dimensionum infinite parvarum apertum est, ipsius superficiem pedalem esse sphaeram, cuius diametrus linea punctum datum cum polo coniungente repraesentetur. Neque vero difficilius intelligendum est, curvas quoque superficie pedali gaudere, si planorum tangentium systemate ipsas repraesentare placet. Cuilibet enim curvae puncto circulus respondet, cuius planum lineam tangentem normaliter secat, cuiusque diametrus, et pro situ et pro magnitudine, perpendiculo ex polo in tangentem demisso aequalis est. Sunt igitur superficies eiusmodi, quae circulo variabili, superficie pedali linearum tangentium, moto atque in plano suo polum continente procreantur. In curvis conclusis, quae omnibus discontinuitatibus et primi et secundi ordinis carent, superficiem quoque pedalem conclusam continuitateque totali gaudere apparet. In curvis autem illis discontinuis aut illis, quae asymptotarum modo in infinitum extenduntur, superficies pedalis plerumque subito evanescit. Quam autem rem nequaquam necessariam esse multae curvae atque eae satis quidem cognitae probant, exempli gratia hyperbola, aut folium Cartesianum, cuius aequatio:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0.$$

In his enim curvis asymptotae nullo modo, hac quidem ratione, ab aliis lineis tangentibus differunt; cuius rei causa facile intelligitur. Si autem curva lineis tangentibus totis in infinitum remotis praedita est, superficies quoque pedalis in infinitum proficiscitur, dum circuli tangentibus singulis correspondentes in lineas rectas se por-

rigunt, ita ut superficies illa et plano interdum asymptotico fruatur et linea plerumque recta polum continente finita sit.

Vice autem versa curvas quoque tamquam limites superficierum pedalium contemplari licet. Quem enim, superficies pedales superficierum cylindricarum curvas esse simplicis curvuturae, atque eas quidem curvas pedales lineae curvaturae, plano normali per polum ducto orientis, effugiat! Superficies autem conorum pedales offerunt nobis curvas sphaericae curvaturae, cum manifesto ea sphaera contineantur, cuius diametrus linea polum et centrum coni iungente repraesentetur. Etenim cum omnia coni plana tangentia per idem centrum proficiscantur, polo cum centro punctoque pedali coniuncto triangulum rectangularem obtinemus, cuius hypotenusa linea illa et pro situ et pro magnitudine constans est. Generaliter autem superficies devolubiles contemplanti, superficies pedales curvae duplicis curvaturae atque eae superioris quidem ordinis, quam sphaericae sese offerunt.

Si vero linea illa recessus (Rückkehrskante) finita et conclusa sit, curvam quoque pedalem superficiei conclusam atque finitam esse apertum est. Linea autem recessus in infinitum extensa, atque modo quidem asymptotico, curva pedalis subito evanescit, nisi asymptota alio adhuc puncto curvam tangat, ita ut continuitas successus tangentium nullibi interrumpatur. Quo facto plana superficiem devolubilem tangentia, quae duobus contactus punctis respondent, coïncidere possunt. Quamobrem elucet, has curvas pedales in illis tantum superficiebus in infinitum proficisci posse, quarum lineae reversionis lineis tangentibus totis in infinitum remotis gaudeant. Neque vero theorema contrarium generaliter iustum est.

Inter ceteras harum curvarum qualitates attentione dignas unam tantum paucis verbis hoc loco illustrare, nobis permissum sit. Plano normali per polum ad latus superficiei devolubilis ducto, hoc plano punctum pedale lateri respondens continetur. Cum autem plana tangentia suum quodque vicinum in illo latere secent, punctum quoque pedale huic alteri plano respondens in eodem plano normali situm esse necesse est. Quamobrem per polum, duo puncta curvae pedalis vicina, A et A', atque punctum C lateris correspondentis, in quo plano normali per polum ducto secatur, circulum semper ponere licet, cuius diametrus linea polum et lateris punctum C denominatum coniungente data est. Quo intellecto, curvae pedalis puncto dato, linea quoque tangens AA' facile construi potest, cum sit lineae AM normalis, si M punctum medium inter P et C designare placet (vide fig. I).

Est autem theorema multo generalius ab viro illustrissimo Raabe primum atque methodis quidem analyticis prolixioribus demonstratum, quod pronuntiat:

lineam superficiei pedalis normalem per punctum, quod medium inter polum punctumque baseos correspondens obtinet, proficisci.

Quod theorema cum nullo negotio considerationibus etiam facillimis pureque geometricis omni generalitate amplecti possimus, hanc demonstrationem hoc loco me afferre lector indulgeat. Sit itaque, ut supra, C punctum superficiei atque P polus. Linea autem PA, normaliter in planum tangens CA deducta, angulus PAC pro omnibus planis tangentibus, quae in puncto C sese intersecant, rectus est. Qua ex re facile intelligitur, omnia puncta A, elemento basali C correspondentia, in superficie sphaerica posita esse, cuius diametrus linea PC sit. Re vera igitur radium sphaerae AM normalem esse superficiei pedali patet. Theorema vero simillimum pro curvis et duplicis et simplicis curvaturae illico ex ejusdem contemplationibus derivatur. Si enim supponimus C curvae planae punctum atque P polum, ex causis supra expositis AA' linea tangens curvae pedalis est: data autem curva duplicis curvaturae punctum P projectio poli in planum osculationis habendum est.

Hac autem planorum tangentium constructione res aliquae ad curvas curvaturae attinentes erui possunt. Curvis curvaturae autem superficiei pedalis illas baseos generaliter non respondere, facile ex his considerationibus colligi potest. Sit (vide fig. II) BB' directio curvae curvaturae baseos, puncta A et A', B et B' puncta correspondentia. Iam planum duobus baseos normalibus in punctis B et B' determinatum, plano PAA' parallelum esse apertum est. Quodsi igitur polus in plano priore situs est, cum puncta quoque A, A', B, B', M, M' in eodem contineantur, normalis MA atque $M'A'$ in idem punctum concurrere necesse est. Quamobrem hoc quidem in casu directioni BB' repondet directio AA' eadem curva curvaturae in superficie pedali. Eandem autem rationem pro directione normali valorem habere, sine ulla difficultate colligi potest, cum BA linea intersectionis planorum correspondentium sit. Quodsi igitur superficies datur, cuius lineae curvaturae lineae planae sint, planis per polum proficiscentibus atque basi ubique normalibus contentae, superficiem pedalem eadem indole atque basin gaudere vel curvis curvaturae iisdem planis contentis etc. praeditam esse elucet.

Neque difficile est, harum superficierum aequationem differentialem constituere.

Ceterum superficies rotatione ortas huius generis esse apertum est. Neque vero disquisitionem aequationis illius generalem hoc loco subire placet, sed cum longius a propositis abesse videatur, in aliam occasionem nobis reservamus.

Quodsi autem basis una tantum curva curvaturae plana, plano normali ad superficiem, gaudet, polusque in hoc ipso situs est, velut una semper in superficiebus rotatione ortis, aut in superficiebus secundi gradus, si polus aut sectione principali aut axe aut centro continetur, huic curvae curvam quoque curvaturae eiusdem indolis in superficie pedali respondere apertum est. Est autem poli situ atque superficie cuiusvis naturae data, semper in hac ipsa basi linea curva, in cuius punctis directiones linearum curvaturae directionibus linearum curvaturae in superficie pedali respondeant. Est enim

illa curva locus punctorum, quorum plana superficiei normalia atque directionibus linearum curvaturae determinata per polum proficiscuntur. Id quod facile ex supra dictis coniicitur. Cuius curvae aequatio nunc invenienda est. Si x, y, z, punctum superficiei basalis, x', y', z' coordinatae variabiles atque ex consueto more

$$\frac{\partial z}{dx} = p; \frac{\partial z}{dy} = q,$$

aequationem plani superficiei normalis obtinemus:

$$(x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz = 0$$

aut cum sit $dz = pdx + qdy$

$$\{(x' - x) + p\,(z' - z)\} + \{(y' - y) + q\,(z' - z)\}\, dy = 0$$

vel
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x' - x) + p\,(z' - z)}{(y' - y) + q\,(z' - z)}$$

Quae aequatio cum ex hypothesi valoribus $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $z' = \gamma$ sufficere debeat, sequitur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - \alpha) + p\,(z - \gamma)}{(\beta - y) + q\,(\gamma - z)},$$

hoc valore in aequationem differentialem linearum curvaturae substituto, aequatio curvae postulatae hanc formam adipiscitur:

$$\left\{\frac{x - \alpha + p\,(z - \gamma)}{\beta - y + q\,(\gamma - z)}\right\}^2 \left\{(1 + q^2)\, s - pqt\right\} + \frac{x - \alpha + p\,(z - \gamma)}{\beta - y + q\,(\gamma - z)} \left\{(1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t\right\} - (1 + p^2)\, s + qpr = 0.$$

Velut in superficiebus secundi gradus, centro gaudentibus:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ubi
$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z};\; q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

$$\frac{\partial p}{dx} = r = -c^2 \frac{(a^2 z^2 + x^2 c^2)}{a^4 z^3}$$

$$\frac{\partial p}{dy} = \frac{\partial q}{dx} = s = \frac{c^4}{a^2 b^2} \cdot \frac{xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial q}{dy} = t = -c^2 \frac{(b^2 z^2 + c^2 y^2)}{b^4 z^3}$$

His autem valoribus substitutis superficiem valde complicatam profluere elucet, cum gradus octavi sit neque ad gradum inferiorem reduci posse mihi saltem videatur. Superficiem autem illam puncta quoque pedalia normalium a polo ad superficiem deductarum continere statim ex aequatione illa probatur, cum pro his ipsis punctis

et
$$x - \alpha + p\,(z - \gamma)$$
et
$$y - \beta + q\,(z - \gamma)$$
evanescant.

In ceteris autem casibus omnibus directiones linearum curvaturae baseos directionibus illarum superficiei pedalis non respondere hac methodo eadem geometrica facillime demonstretur. Sit, vide fig. II, BB' linea curvaturae baseos atque AA' directio respondens, P denique ut supra polus. Iam cum PA atque PA' parallelae sint normalibus baseos resp. in punctis B et B' planum quoque APA' plano normali baseos in BB' parallelum est. MM' porro parallelum BB'; tria igitur plana aequidistantia atque parallela fingi possunt, quorum unum lineam AA', alterum MM', tertium denique BB' contineat. Si igitur lineae normales AM et $A'M'$ se ipsas secare aut in uno plano contineri possent, lineae quoque MM' et AA' in eodem plano aut, cum jam in planis parallelis sint, parallelae quoque essent. Neque autem AA' et BB' parallelae esse possunt, cum, si invariata directione AA' polus P in planum normale ductum per BB' transfertur, illae directiones aperte differant, si enim eaedem essent, PB linea esset superficiei normalis, id quod contra hypothesin.

Neque vero difficile est linearum curvaturae pedalium aequationem differentialem ex baseos differentialibus conflatam proponere, vel eam curvam basalem, quae respondeat illi curvae curvaturae, aequatione differentiali exprimere. Etenim si x, y, z, p, q, r, s, t ad basin referuntur atque X, Y, Z, coordinatae variabiles, hanc pro superficiei pedalis linea normali formam adipiscimur:

$$AX = BZ + C$$
$$AY = B'Z + C'$$

ubi abbreviationis causa positum est

$$A = (z - \zeta)\{-1 + p^2 + q^2\} + 2\{p(x - \xi) + q(y - \eta)\}$$
$$B = (x - \xi)\{1 - p^2 + q^2\} - 2\{qp(y - \eta) + p(z - \zeta)\}$$
$$C = (1 + p^2 + q^2)\{\xi z - \zeta x\} + \{p(z + \zeta) + (x + \xi)\}\{p(x - \xi) + q(y - \eta) - (z - \zeta)\}$$
$$B' = (y - \eta)\{1 + p^2 - q^2\} - 2\{qp(x - \xi) - q(z - \zeta)\}$$
$$C' = (1 + p^2 + q^2)\{\eta z - \zeta y\} + \{q(z + \zeta) + (y + \eta)\}\{p(x - \xi) + q(y - \eta) - (z - \zeta)\}$$

quo facto aequationem quaesitam obtinemus

$$\frac{C\,dA - A\,dC}{A\,dB - B\,dA} = \frac{C'\,dA - A\,dC'}{A\,dB' - B'\,dA}$$

est autem, si

$\frac{dy}{dx}$ brevitatis causa littera y' designamus

$$\frac{dA}{dx} = (p + \eta y')\{1 + p^2 + q^2\} + 2(r + sy')\{x - \xi + p(z - \zeta)\}$$
$$+ 2(s + ty')\{y - \eta + q(z - \zeta)\}$$

$$\frac{dB}{dx} = (1 + p^2 + q^2) - 2(r + sy')\{p(x - \xi) + q(y - \eta) - (z - \zeta)\}$$
$$+ 2(s + ty')\{q(x - \xi) + p(y - \eta)\}$$

$$\frac{dB'}{dx} = y'(1+p^2+q^2) + 2(r+sy')\{q(x-\xi)+p(y-\eta)\}$$
$$-2(s+ty')\{p(x-\xi)+q(y-\eta)-(z-\zeta)\}$$

$$\frac{dC}{dx} = (1+p^2+q^2)\{\xi(p+qy')-\zeta\} + \{1+p^2+pqy'\}\{p(x-\xi)+q(y-\eta)-(z-\zeta)\}$$
$$+(r+sy')\{(z+\zeta)(p(x-\xi)+q(y-\eta)-(z-\zeta))+(x+\xi)(x-\xi+p(z-\zeta))\}$$
$$+(s+ty')\{(y-\eta)(p(z+\xi)+x+\xi)+2q(\xi z-\zeta x)\}$$

$$\frac{dC'}{dx} = (1+p^2+q^2)\{\eta(p+qy')-\zeta y'\} + (1+q^2+pqy')\{p(x-\xi)+q(y-\eta)-(z-\zeta)\}$$
$$+(r+sy')\{(x-\xi)(q(z+\zeta)+(y+\eta)+2p(\eta z-\zeta y)\}$$
$$+(s+ty')\{(z+\zeta)\big(p(x-\xi)+q(y-\eta)-(z-\zeta)\big)+(y+\eta)\{q(z-\zeta)+(y-\eta)\}\}$$

His valoribus substitutis aequatio prodit differentialis postulata atque primi quidem ordinis, secundique gradus. Qua integrata curvarum specificarum in superficie basali systema atque lineis curvaturae superficiei pedalis respondens obtineri apertum est. Quo facto lineae illae solis eliminationibus facile eruuntur.

Priusquam autem ad alia theoremata progredimur, pauca adhuc de forma generali superficierum pedalium addenda esse videntur. Iam superficie aliqua data n planis tangentibus inter sese parallelis gaudente, radium quoque vectorem superficiei pedalis a polo proficiscentem eodem modo n valores habere apparet; omnes igitur, generaliter loquendo, superficies superficiem pedalem habent non ex una tantum parte, quasi pallio, sed n palliis separatis compositam. Quae partes generaliter neque se ipsas secare neque se invicem tangere possunt. Hae autem sunt cum sectionis tum tactionis conditiones: Si superficies pedalis se ipsam aut in puncto solo aut in linea curva tangit, basin quoque in punctis correspondentibus, aut singularibus aut in curvam distributis, se ipsam tangere oportet, id quod ex constructione normalis, supra exposita, sine ullo negotio colligitur. Si autem superficies pedalis se ipsam intersecat, plana, radiis vectoribus a polo ad puncta intersectionis ductis normalia, basin in duobus saltem punctis tangere debent. Normali enim superficiei pedalis constructa duo plana eandem superficiem tangentia atque ea diversa quidem ex eodem puncto prodeunt. In superficie exempli gratia illa, quae rotatione lemniscatae circa axem magnum gignitur, superficiem pedalem se in curva circuli pedali atque cylindro in punctis summis tangenti correspondente secare apertum est. Omnes vero functiones unius variabilis periodicae, continuae, finitae, velut cosinus et sinus, curvas praestant, quarum rotatione circa axem coordinatarum X superficies a cylindro huic axi parallelo innumeris circulis contactae procreantur. Quamobrem superficies pedalis ex innumeris palliis constat, quae omnia in eandem curvam circuli pedalem concurrunt. Eadem autem ratione, si basis a plano in curva tangitur, puncta superficiei pedalis correspondentia in punctum restrictionis commutari facile demonstratur.

Pauca adhuc tantum de significatione poli, tamquam superficiei pedalis punctum conspecti, addere liceat. Etenim cum ex polo ipso, tamquam centro, conus superficiem basalem tangens construi possit, atque igitur, cum sint innumera plana basin tangentia, quae per polum proficiscantur, id ipsum punctum cum ad superficiem pedalem attinere tum toti lineae contactionis baseos atque illius coni respondere elucet. Praeterea autem acumen aut punctum restrictionis cuiusvis superficiei pedalis eiusmodi pallii existit. Cum enim polus atque superficiei puncta coincidant, plana tangentia lineae polum atque puncta baseos coniungenti normalia sunt. Quamobrem non unum tantum planum tangens in polo obtinemus sed multitudinem infinitam, quae conum concentricum formant. Eiusdem autem aequatio ex illa coni tangentis, cum latera normalia sint, facile deducitur. Est igitur polus generaliter, si omnino superficiei pedalis punctum est, id quod punctum singulare (singulärer Punkt) dicunt. Si autem in superficie basali ipsa situs est, superficiem pedalem cuspidem illa nitentem habere ex contemplationibus satis obviis facile intelligitur.

Omnia denique, quae hoc articulo de generali superficierum pedalium forma allata sunt, quin mutatis mutandis non solum pro superficiebus unicis atque ex una lege formatis, sed etiam pro combinatione aliqua superficierum diversarum valorem iustum habeant, dubitari non potest.

Exposita igitur superficierum pedalium forma ad alia de volumine corporum pedalium theoremata, quae difficultatibus quibusdam obnoxia esse videntur, transeamus. Qualitates autem superficierum pedalium cum et ex baseos natura et ex poli situ pendere apertum sit, easdem pro his quoque rationibus diversis contemplari licet. Inter quaestiones igitur huc incidentes illa imprimis, quae nexum inter poli situm et volumen corporis pedalis constituit, digna nobis videtur, quae pluribus illustretur, cum propter gravitatem rei ipsius tum, quoniam quaestio similis attinens ad curvas pedales ab illustrissimis doctissimisque viris et methodo quidem synthetica, a Steiner, methodo vero analytica paucis abhinc annis a Raabe satis iam exposita et paene finita haberi potest. Neque etiam a priori dubitandum est, quin qualitates relationesque huius voluminis in spatii formis trium dimensionum multo generaliores amplioresque evadant, cum superficies pedales superficierum cylindracearum curvas unius curvaturae atque ceterarum superficierum devolubilium lineas duplicis curvaturae comprehendant.

Sit itaque

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

aequatio baseos, significemusque ut supra, sicuti solent viri quoque doctissimi, Monge etc. littera p differentiale partiale $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, itemque littera q differentiale partiale $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$. Quo

facto aequatio superficiei pedalis eliminatione coordinatarum ξ, η, ζ ex his quatuor aequationibus obtinetur:

1. $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$
2. $x - \alpha + p(z - \gamma) = 0$
3. $y - \beta + q(z - \gamma) = 0$
4. $(x - \xi)(x - \alpha) + (y - \eta)(y - \beta) + (z - \zeta)(z - \gamma) = 0$

quarum aequationum secunda et tertia lineam per polum, cuius α, β, γ sunt coordinatae, ad normalem superficiei, puncto ξ, η, ζ correspondentem, paralleliter ductam significat. Ultima autem aequatio ad planum basin atque in eodem quidem puncto ξ, η, ζ tangens refertur, si valores differentialium p et q, deducti ex aequationibus (2) et (3) substituuntur. Si igitur volumen spatii inter superficiem pedalem et superficiem conicam aut pyramidalem, cuius acumen in polo ipso situm est, intercepti contemplari volumus, haud inutile sit, coordinatas polares introducere, initiumque coordinatarum in polum ipsum transferre. Quamobrem substituamus:

$$A \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + r \cos u \cos v \\ y = \beta + r \cos u \sin v \\ z = \gamma + r \sin u \end{array} \right.$$

ita ut r radium vectorem a polo in punctum superficiei pedalis ductum designet, u vero angulum, quem ipse cum plano coordinatarum x, y format (cadere autem angulum illum inter $+90^\circ$ atque -90° necesse est), v denique angulum repraesentet, quem huius radii vectoris r proiectio in planum x, y cum axe positivo coordinatarum x format, quique incipiens a puncto 0° versus partem positivam coordinatarum y usque ad 360° numeratur.

Valoribus autem coordinatarum ex aequationibus (A) substitutis aequationes (2) et (3) in hanc facile formam rediguntur:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \cos u \cos v - \frac{\partial f}{\partial \xi} \sin u = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \cos u \sin v - \frac{\partial f}{\partial \eta} \sin u = 0$$

quibus ex relationibus subtrahendo facile haec derivatur:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \cos v - \frac{\partial f}{\partial \xi} \sin v = 0$$

quae quidem aequatio sola iam observatione obtineri potest, v esse angulum inter proiectionem lineae normalis curvae, cuius aequatio

$$f(\xi, \eta, \text{Const.}) = 0$$

atque axem positivum coordinatarum x interceptum. Quarta autem aequatio (4) in hanc sine ullo labore formam redigitur:

$$r = (\xi - \alpha) \cos u \cos v + (\eta - \beta) \cos u \sin v + (\zeta - \gamma) \sin u$$

id quod sola substitutione valorum x, y, z probatur, ita ut radius vector superficiei pedalis statim angulis u et v explicite datum sit. Neque difficile est, coordinatas ξ, η, ζ tamquam functiones angulorum u et v reperire, etenim cum puncta sint, quorum plana tangentia lineae angulis u et v determinatae normalia supponantur, aequatio autem plani eiusmodi sit:

$$\operatorname{cotg} u \cos v \,.\, x + \operatorname{cotg} u \sin v \,.\, y + z = 0$$

valores ξ, η, ζ ex his tribus aequationibus derivantur:

$$p = \operatorname{cotg} u \cos v$$

$$q = \operatorname{cotg} u \sin v$$

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Constantibus igitur angulis u et v cum valores determinati coordinatarum x, y, z respondeant atque hoc quidem modo ut pro superficiei natura valores tot diversos adipiscamur, quot sunt plana tangentia, directioni u, v normalia aut inter se parallela, radius vector r generaliter functio multiplex (mehrdeutige Function) angulorum u, v exhibetur, quae res magni momenti in integrationibus subsequentibus est.

Elementum autem dk voluminis pyramidalis supra definiti, cuius acumen polus, cuiusque basin superficies pedalis format, omissis valoribus infinite parvis quarti ordinis in hanc formam redigitur:

$$dk = r^2 \cos u \, du \, dv \, dr$$

aut valore supra evoluto radii vectoris substituto:

$$dk = \Big\{(\xi - \alpha) \cos u \cos v + (\eta - \beta) \cos u \sin v + (\zeta - \gamma) \sin u\Big\}^2 \cos u \, du \, dv \, dr.$$

Integrando autem secundum r, a o usque ad pretium indefinitum r obtinemus volumen illud pyramidale infinite parvum, cuius acumen polus, cuiusque basis quadrilaterum infinite parvum superficiei pedalis. Quodsi litera k designamus,

$$k = \tfrac{1}{3} \Big\{(\xi - \alpha) \cos u \cos v + (\eta - \beta) \cos u \sin v + (\zeta - \gamma) \sin u\Big\}^3 \cos u \, du \, dv$$

aut volumen universum corporis pedalis partis finitae:

$$K = \tfrac{1}{3} \int_a^b \int_{a'}^{b'} \Big\{(\xi - \alpha) \cos u \cos v + (\eta - \beta) \cos u \sin v + (\zeta - \gamma) \sin u\Big\}^3 \cos u \, du \, dv.$$

Primo igitur inquiramus, utrum hoc integrale sitibus poli singularibus constitutis pretium maximum aut minimum admittat, necne. Priusquam autem propositionem omni generalitate amplectimur, has tantum superficies basales aut partes tantum superficierum basalium contemplemur, quarum planorum tangentium nulla inter sese parallela sunt, velut in omnibus superficiebus secundi gradus plano per centrum superficiei posito duas superficiei partes, proprietate postulata gaudentes, obtinemus. Harum autem partium tantum ratione habita, radius vector r necesse functio simplex (eindeutige Funktion) directionis u, v est, ita ut voluminis superficiei pedalis definitio dubia non sit, cum

omnes radii r in uno tantum puncto cum superficie pedali concurrant. Ratione autem analytica res sine ulla difficultate hoc modo exprimi potest, ut r iuste functio angulorum u, v definiatur; quamobrem omnes radices aliaeque multiplices functiones valoribus ξ, η, ζ comprehensae valores absolute definitos subeunt, dummodo coordinatae ξ, η, ζ limitibus certis a superficiei natura pendentibus contineantur. His praemissis integrale K functionem coordinatarum α, β, γ habemus, limitibus a, b, a', b', qui tum independentes esse, tam unus ab altero pendere possunt, valores determinatos tribuentes. Ex arbitrio igitur eligi possunt, dummodo suppositioni nostrae sufficiant, id quod in quavis superficie disquisitione speciali diiudicandum est. Aperte enim constantium limitum significatio haec est, ut eandem semper superficiei basalis partem amplectamur, cum directioni u_0, v_0 cuilibet idem semper planum tangens respondere appareat. In hac autem superficierum pedalium disquisitione haud inutile erit, illa integralis K elementa, quae ex solius baseos natura pendent, separare certisque litteris denominare. Cum autem summa e 6 summandis conflata in tertiam potestatem tollenda sit, solutis parenthesibus, aequationem huius formae prodituram esse facile intelligitur, si $\xi \cos u \cos v + \eta \cos u \sin v + \zeta \sin u$ littera $\varDelta$ designamus:

$$
\begin{aligned}
K = {}^1\!/_3 \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta^3 \cos u \, du \, dv &= {}^1\!/_3 \, P_0 \\
- \alpha \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta^2 \cos^2 u \cos v \, du \, dv &= - \alpha P_1 \\
- \beta \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta^2 \cos^2 u \sin v \, du \, dv &= - \beta P_2 \\
- \gamma \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta^2 \cos u \sin u \, du \, dv &= - \gamma P_3 \\
+ \alpha^2 \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta \cos^3 u \cos^2 v \, du \, dv &= \alpha^2 P_1' \\
+ \beta^2 \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta \cos^3 u \sin^2 v \, du \, dv &= \beta^2 P_2' \\
+ \gamma^2 \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta \cos u \sin^2 u \, du \, dv &= \gamma^2 P_3' \\
+ 2 \alpha\beta \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \varDelta \cos^3 u \cos v \sin v \, du \, dv &= 2 \alpha \beta P_4'
\end{aligned}
$$

$$+ 2\,\alpha\gamma \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \Delta \cos^2 u \sin u \cos v \, du\, dv = 2\,\alpha\gamma\, P_5',$$

$$+ 2\,\beta\gamma \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \Delta \cos^2 u \sin u \sin v \, du\, dv = 2\,\beta\gamma\, P_6'$$

$$- \tfrac{1}{3} \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \left\{ \alpha \cos u \cos v + \beta \cos u \sin v + \gamma \sin u \right\}^3 \cos u \, du\, dv$$

aut abbreviationibus his aequationibus definitis:

$$\begin{aligned} K = {} & \tfrac{1}{3} P_0 - \alpha P_1 - \beta P_2 - \gamma P_3 + \alpha^2 P'_1 + \beta^2 P_2' \qquad B \\ & + \gamma^2 P_3' + 2\alpha\beta P_4' + 2\alpha\gamma P_5' + 2\beta\gamma P_6' \\ & - \tfrac{1}{3} \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \left\{ \alpha \cos u \cos v + \beta \cos u \sin v + \gamma \sin u \right\}^3 \cos u \, du\, dv \end{aligned}$$

unde volumen k respectu coordinatarum α, β, γ poli functionem tertii gradus esse coefficientesque membrorum trium dimensionem nullo modo ab indole superficiei pedalis, sed ex limitibus tantum a, b, a' b' pendere sequitur. Quamobrem si volumen illud aut maximum aut minimum requiratur, derivationes primi ordinis sumtae secundum tres coordinatas α, β, γ evanescere debent. Illico itaque tres aequationes prodeunt, quae definiendis, determinandisque his valoribus serviunt. Neque enim de maximis aut minimis relativis agitur, qua in re differentialium $d\alpha$, $d\beta$; $d\gamma$ aut duo functiones essent tertii aut unum tantum functio alterorum.

Aequationes igitur coordinatas poli, cui respondet maximum aut minimum absolutum, definientes hae sunt:

$$C \left\{ \begin{aligned} & 0 = \frac{\partial k}{\partial \alpha} = - P_1 + 2\,(\alpha' P_1' + \beta' P_4' + \gamma' P_6') \\ & - \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \left\{ \alpha' \cos u \cos v + \beta' \cos u \sin v + \gamma' \sin u \right\}^2 \cos^2 u \cos v \, du\, dv \\ & 0 = \frac{\partial k}{\partial \beta} = - P_2 + 2\,(\alpha' P_4' + \beta' P_2' + \gamma' P_5') \\ & - \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \left\{ \alpha' \cos u \cos v + \beta' \cos u \sin v + \gamma' \sin u \right\}^2 \cos^2 u \sin v \, du\, dv \\ & 0 = \frac{\partial k}{\partial \gamma} = - P_3 + 2\,(\alpha' P_6' + \beta' P_5' + \gamma P_3') \\ & - \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \left\{ \alpha' \cos u \cos v + \beta' \cos u \sin v + \gamma' \sin u \right\}^2 \cos u \sin u \, du\, dv \end{aligned} \right.$$

Ex hoc aequationum systemate secundi gradus valores coordinatarum α', β', γ' deducantur, qui volumini aut maximo aut minimo respondeant.

Antequam autem has disquisitiones amplius persequi conamur, volumen k in aliam formam redigere necesse sit. Quamobrem, si coordinatis poli minimi ex systemate (C) deductis, litteris α, β, γ, generales poli coordinatas, ut supra, denominamus, aequari semper potest

$$\alpha = \alpha' + l; \ \beta = \beta' + m$$
$$\gamma = \gamma' + n$$

l, m, n pretiis aut positivis aut negativis fruentibus. Quo facto valorem k, cum sit $F(\alpha, \beta, \gamma)$ auxilio seriei Taylori in functiones complurium variabilium extensae, secundum potestates valorum m, l, n evolvere licet. Qua transformatione adhibita, quamvis coordinatae α', β', γ' explicite datae non sint, attamen aequationes (C) aequivalentes in computum ducere possumus.

Iam cum differentialia primi ordinis ex aequationibus (C) evanescant:

$$k = k' + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 k'}{\partial \alpha'^2} l^2 + \frac{\partial^2 k'}{\partial \alpha' \partial \beta'} lm + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 k'}{\partial \beta'^2} m^2 + \frac{\partial^2 k'}{\partial \alpha' \partial \gamma'} l . n + \frac{\partial^2 k'}{\partial \beta' \partial \gamma'} m . n$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 k'}{\partial \gamma'^2} n^2 + \tfrac{1}{6} \frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha'^3} l^3 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha'^2 \partial \beta} l^2 m + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha' \partial \beta'^3} l m^2 + \tfrac{1}{6} \frac{\partial^3 k'}{\partial \beta'^3} m^3$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha'^2 \partial \gamma'} l^2 n + \frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha' \partial \beta' \partial \gamma'} l.m.n + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 k'}{\partial \beta'^2 \partial \gamma'} m^2 n + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha' \partial \gamma'^2} l n^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 k'}{\partial \beta' \partial \gamma'} m n^2 + \tfrac{1}{6} \frac{\partial^3 k'}{\partial \gamma'^3} n^3.$$

Neque vero series amplius in membra quatuor dimensionum extenditur, sicuti ex forma functionis tertii gradus k patet, cum differentialia partialia superioris ordinis atque tertii necessario nulla sint. Iam autem differentialia singula ex superiore illo valore voluminis k (vide aequationem B) derivanda sunt. Quod si abbreviationis causa expressionem:

$$\alpha' \cos u \cos v + \beta' \cos u \sin v + \gamma' \sin u$$

littera D significamus, sola differentiatione valores eveniunt

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \alpha'^2} = 2 P_1' - 2 \int_a^b \int_{a'}^{b'} D \cos^3 u \cos^2 v \, du \, dv$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \beta'^2} = 2 P_2' - 2 \int_a^b \int_{a'}^{b'} D \cos^3 u \sin^2 v \, du \, dv$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \gamma'^2} = 2 P_3' - 2 \int_a^b \int_{a'}^{b'} D \cos u \sin^2 u \, du \, dv$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \alpha' \partial \beta'} = 2 P_4' - 2 \int_a^b \int_{a'}^{b'} D \cos^3 u \cos v \sin v \, du \, dv$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial\alpha'\,\partial\gamma'} = 2P_6' - 2\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} D\cos^2 u \sin u \cos v\, du\, dv$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial\beta'\,\partial\gamma'} = 2P_5' - 2\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} D\cos^2 u \sin u \sin v\, du\, dv$$

Si has differentias valoribus resp. $\frac{1}{2}l^2$, $\frac{1}{2}m^2$, $\frac{1}{2}n^2$ etc. multiplicamus producta autem hoc modo formata summamus, transformationibus elementaribus adhibitis, hoc summae pretium exhibetur:

$$l^2P_1' + m^2P_2' + n^2P_3' + 2\,lmP_4' + 2\,mnP_5' + 2\,lnP_6' - \int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \{\alpha'\cos u\cos v + \beta'\cos u\sin v$$
$$+ \gamma'\sin u\}\ \{l\cos u\cos v + m\cos u\sin v + n\sin u\}^2\cos u\, du\, dv.$$

Valoribus autem coefficientium integralium P_1', P_2' ... P_6' (vide pag. 14) substitutis, pro priore huius expressionis parte statim obtinemus:

$$\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \{\xi\cos u\cos v + \eta\cos u\sin v + \zeta\sin u\}$$
$$\{l\cos u\cos v + m\cos u\sin v + n\sin u\}^2\cos u\, du\, dv$$

aut differentia duorum integralium in formam unius integralis redacta:

$$\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \{(\xi - \alpha')\cos u\cos v + (\eta - \beta')\cos u\sin v + (\zeta - \gamma')\sin u\}\ \{l\cos u\cos v$$
$$+ m\cos u\sin v + n\sin u\}^2\cos u\, du\, dv \qquad \text{aut}$$

$$\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} r'\cos u\{l\cos u\cos v + m\cos u\sin v + n\sin u\}^2\, du\, dv$$

si littera r' radium vectorem polo valoris minimi aut maximi respondentem denominamus. Hoc igitur membro valoris k constituto restat nobis, ut summam illam differentialium tertii ordinis determinemus. Una autem sola differentiatione ex systemate superiore sequitur:

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial\alpha'^3} = -2\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \cos^4 u\cos^3 v\, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial\alpha'^2\,\partial\beta'} = -2\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \cos^4 u\cos^2 v\sin v\, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial\alpha'\,\partial\beta'^2} = -2\int_a^b\!\!\int_{a'}^{b'} \cos^4 u\cos v\sin^2 v\, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \beta'^3} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \cos^4 u \sin^3 v \, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha'^2 \partial \gamma'} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \cos^3 u \cos^2 u \sin u \, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha' \partial \beta' \partial \gamma'} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \cos^3 u \cos v \sin v \sin u \, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \beta'^2 \partial \gamma'} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \cos^3 u \sin^2 v \sin u \, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \alpha' \partial \gamma'^2} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \cos^2 u \sin^2 u \cos v \, du\, dv$$

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \beta' \partial \gamma'^2} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \cos^2 u \sin^2 u \sin v \, du\, dv$$

denique

$$\frac{\partial^3 k'}{\partial \gamma'^3} = -2\int_a^b\int_{a'}^{b'} \sin^3 u \cos u \, du\, dv.$$

His valoribus omnibus suo quoque factore $\frac{1}{6} l^3$, $\frac{1}{2} l^2 m$, $\frac{1}{2} lm^2 \ldots \frac{1}{6} n^3$ multiplicatis summatisque, sine ulla difficultate sequitur:

$$-\tfrac{1}{3}\int_a^b\int_{a'}^{b'} \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\}^3 \cos u \, du\, dv.$$

Signum autem huius integralis ex signo prioris tantum factoris scilicet:

$$l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u$$

pendet. Valorem autem voluminis K in hanc formam transformatum obtinemus:

$$(a) \qquad K = K' + \int_a^b\int_{a'}^{b'} \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\}^2 \left\{ r' - \tfrac{1}{3} (l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u) \right\} \cos u \, du\, dv$$

qua in aequatione habemus:

$$(a') \qquad K' = \tfrac{1}{3}\int_a^b\int_{a'}^{b'} \left\{ (\xi - \alpha') \cos u \cos v + (\eta - \beta') \cos u \sin v + (\zeta - \gamma') \sin u \right\}^3 \cos u \, du\, dv$$

Ex his aequationibus antequam de minimo aut maximo diiudicare possumus, generalia adhuc quaedam de signo radiorum vectorum r addere necesse est. Etenim primo ex ratiocinationibus geometricis satis obviis apparet, normalem a polo in planum

quidquam demissam, si polo ab uno latere posito positiva sit, polo ab altero latere sito negativam evadere; polus autem si in plano ipso sit, nullum patet esse radium vectorem aut normalem r, ita ut valor ipsius a positivo ad negativum descendat, polo in linea planum secante versus latus negativum moto: id quod ex formulis nostris analyticis quoque severe deduci posse demonstrandum est. Aequatio igitur plani ad directionem u, v normalis haec est:

$$x \cos u \cos v + y \cos u \sin v + z \sin u = \text{Const.}$$

si porro per polum α, β, γ proficiscitur:

$$x \cos u \cos v + y \cos u \sin v + z \sin u = \alpha \cos u \cos v + \beta \cos u \sin v + \gamma \sin u$$

ita ut posterior haec expressio non commutetur, si coordinatarum α, β, γ loco coordinatas puncti alicuius plani illius normalis substituimus. Quodsi igitur $x_0\, y_0\, z_0$ coordinatae sunt puncti in quo planum illud atque normalis ab initio coordinatarum in ipsum demissa concurrunt, statim invenimus:

$$\alpha \cos u \cos v + \beta \cos u \sin v + \gamma \sin u = x_0 \cos u \cos v + y_0 \cos u \sin v + z_0 \sin u = p_0.$$

Id autem est, ut ex contemplatione parallelepipedi rectangularis, cuius latera sunt $x_0\, y_0\, z_0$, enotescit, distantia initii coordinatarum a plano illo polum continente et ad directionem u, v normali. Ex iisdem autem causis:

$$\xi \cos u \cos v + \eta \cos u \sin v + \zeta \sin u = p$$

distantia poli a plano parallelo per punctum ξ, η, ζ proficiscente. Iam ex significatione geometrica horum valorum sequitur, positivos eos necessario evadere, id quod ex expressione p_0 facile quoque probatur.

Quamobrem radium vectorem r superficiei pedalis differentiam esse magnitudinum duarum positivarum adipiscimur, scilicet:

$$r = p - p_0$$

quodsi igitur polus ab altero latere plani tangentis situs est, ac initium coordinatarum, ita ut

$$p_0 > p$$

radius vector r valorem negativum obtinet. Si vero inter duo plana, quorum alterum planum tangens, alterum planum huic parallelum,

$$p_0 < p$$

quamobrem radius vector prodit posivus. Si autem denique polus ab altera parte huius per initium proficiscentis plani situs est, normalis p_0 positiva aperte angulos polares $-u$ atque $v + 180^\circ$ cum axibus constituit, si directio p angulos u atque v format, ita ut valorem positivum adipiscamur

$$\alpha \cos(-u) \cos(v + 180^\circ) + \beta \cos(-u) \sin(v + 180^\circ) + \gamma \sin(-u) = p_0$$

aut

$$\alpha \cos u \cos v + \beta \cos u \sin v + \gamma \sin u = -p_0$$

ita ut hoc quoque casu $r = p + p_0$
semper positivum sit, cum formam summae ex positivis summandis conflatae acceperit. Est igitur r semper positivum, si polus ab eadem plani tangentis parte ac initium coordinatarum est, evanescit autem in hoc plano, evadit denique negativum, si ab altera parte ac punctum initiale positum est. Si vero hoc punctum initiale in plano ipso contineatur, radius vector aut positivus aut negativus haberi potest, cum sit in limite positivorum negativorumque. Plano tangente igitur per initium moto, radius vector a positivo valore ad negativum subito transit, ita ut functio differentialis contenta sub integrali non modo k' sed etiam

$$\int_a^b\int_{a'}^{b'} (l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u)^2\, r' \cos u \, du\, dv$$

rupturam continuitatis perpetiatur, si pretia correspondentia angulorum u et v variationes infinite parvas accipiant, cum r a valore r_0 ad $-r_0$ transsiliat. Curva autem huic rupturae in basi correspondens manifesto ea est, qua superficies basalis cono, cuius centrum initium ipsum, tangitur. Quamobrem, ut in disquisitione partis baseos, planis tangentibus parallelis carentis, atque angulis a, b, a', b' determinatis definitae, hanc difficultatem evitemus, ita semper initium coordinatarum accipiatur, ut planum tangens per ipsum proficisci non possit, quo facto idem omnium planorum latus positivum, negativumve esse apertum est.

Quodsi fieri non possit, superficies basalis linea contactus coni illius in duas partes dirimitur, atque integrale in duo alia transformatur, quae in unam quodque superficiei partem extenduntur. Sunt igitur poli coordinatae α, β, γ semper tales, ut ex aequatione

$$(\alpha - \xi)\frac{\partial f}{\partial \xi} + (\beta - \eta)\frac{\partial f}{\partial \eta} + (\gamma - \zeta)\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0$$

valores ξ, η, ζ imaginares tantum deriventur. Quo facto, pars quaedam spatii planis basin tangentibus impletur, quam generaliter planis tangentibus, limitibus extremis correspondentibus, in hoc quidem genere superficierum in superioribus adhuc supposito limitari elucet, tamquam in circuli arcu AB spatia $DABD'$ atque ECE' lineis tangentibus simili modo privata sunt (vide fig. III).

His autem praemissis si polus α', β', γ' ex aequationibus (C) erutus in spatio $DABD'$ positus sit, radios vectores r' omnes positivos esse constat. Quamobrem volumen K' aut integrale

$$\tfrac{1}{3}\int_a^b\int_{a'}^{b'} r'^3 \cos u \, du\, dv$$

positivum semper est, cum elementa differentialia omnia sint positiva, etenim $\cos u$ quoque, cum angulus u inter $+90^0$ atque -90^0 cadat positivum semper restare neminem effugiat. Iam vero si:

$$l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u$$

independentibus inter se lineis l, m, n, ita constituatur, ut minus sit tantum linea $3r'_0$, si r'_0 radiorum vectorum minimum designet, summandum quoque alterum aequationis (a) (vide pag. 18) positivum esse appatet, ita ut k' verum minimum sit, cum minor reperiatur omnibus valoribus vicinis; si autem existat polus in spatio ECE', quod omnino adesse supponimus, quae hoc ipso momento exposita sunt, in contrarium mutantur, cum ceteris rebus invariatis radii vectores r' tantum valores negativos obtineant, ita ut k negativum, k' eodem modo negativum maiusque valore k habeatur, quamobrem k' maximum. Pretium autem absolutum tantum respicere si placet, hoc quoque maximum tamquam minimum adspici posse, negari non potest. Si denique polus α', β', γ' spatio planis tangentibus repleto contineatur duo superficiei pedalis pallia, alterum positivum alterum negativum evadere apertum est, quorum differentia aut maximum aut minimum est. Linea autem tactionis coni per α', β', γ' ad basin constructi partes huius superficiei correspondentes derimit; curvae autem aequatio est:

$$\gamma' - \zeta = p(\alpha' - \xi) + q(\beta' - \eta) \text{ et}$$
$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

In hoc casu de maximo vel minimo ex indole tantum speciali superficiei datae diiudicari potest.

Pauca adhuc de aequationum systemate (C) addenda esse videntur. Parenthesibus enim integralium dissolutis hanc aequationes accipiunt formam:

$$P_1 = 2\alpha P'_1 + 2\beta P'_4 + 2\gamma P'_6 - \alpha'^2 C'_{\alpha^2} - 2\alpha'\beta' C'_{\alpha\beta}$$
$$- 2\alpha'\gamma' C'_{\alpha\gamma} - \beta'^2 C'_{\beta^2} - 2\beta'\gamma' C'_{\beta\gamma} - \gamma'^2 C'_{\gamma^2}$$
$$P_2 = 2\alpha P'_4 + 2\beta P'_2 + 2\gamma P'_5 - \alpha'^2 C''_{\alpha^2} - 2\alpha'\beta' C''_{\alpha\beta}$$
$$- 2\alpha'\gamma' C''_{\alpha\gamma} - \beta'^2 C''_{\beta^2} - 2\beta'\gamma' C''_{\beta\gamma} - \gamma'^2 C''_{\gamma^2}$$
$$P_3 = 2\alpha P'_4 + 2\beta P'_5 + 2\gamma P'_3 - \alpha'^2 C'''_{\alpha^2} - 2\alpha'\beta' C'''_{\alpha\beta}$$
$$- 2\alpha'\gamma' C'''_{\alpha\gamma} - \beta'^2 C'''_{\beta^2} - 2\beta'\gamma' C'''_{\beta\gamma} - \gamma'^2 C'''_{\gamma^2}$$

Inter hos autem valores C has invenimus aequationes:

$$C'_{\alpha\beta} = C''_{\alpha^2};\ C'_{\alpha\gamma} = C'''_{\alpha^2}$$
$$C''_{\beta\gamma} = C'''_{\beta^2};\ C''_{\alpha\beta} = C'_{\beta^2}$$
$$C'''_{\alpha\gamma} = C'_{\gamma^2};\ C'''_{\beta\gamma} = C''_{\gamma^2}; \text{ et denique}$$
$$C'''_{\alpha\beta} = C'_{\beta\gamma} = C''_{\alpha\gamma}$$

quibus valoribus substitutis hoc systema assequimur:

$$E' \begin{cases} P_1 = 2\alpha' P'_1 + 2\beta' P'_4 + 2\gamma' P'_6 - \alpha'^2 \underset{\alpha^2}{C'} - \beta'^2 \underset{\beta^2}{C'} - \gamma'^2 \underset{\gamma^2}{C'} - 2\alpha'\beta' \underset{\alpha^2}{C''} - 2\alpha'\gamma' \underset{\alpha^2}{C'''} - 2\beta'\gamma' \underset{\alpha\beta}{C'''} \\ P_2 = 2\alpha' P'_4 + 2\beta' P'_3 + 2\gamma' P'_5 - \alpha'^2 \underset{\alpha^2}{C''} - \beta'^2 \underset{\beta^2}{C''} - \gamma'^2 \underset{\gamma^2}{C''} - 2\alpha'\beta' \underset{\beta^2}{C''} - 2\alpha'\gamma' \underset{\alpha\beta}{C'''} - 2\beta'\gamma' \underset{\beta^2}{C'''} \\ P_3 = 2\alpha' P'_6 + 2\beta' P^1_5 + 2\gamma' P'_3 - \alpha'^2 \underset{\alpha^2}{C'''} - \beta'^2 \underset{\beta^2}{C'''} - \gamma'^2 \underset{\gamma^2}{C'''} - 2\alpha'\beta' \underset{\alpha\beta}{C'''} - 2\alpha'\gamma' \underset{\gamma^2}{C'} - 2\beta'\gamma' \underset{\gamma^2}{C'''} \end{cases}$$

sunt autem valores ipsorum C sine ullo negotio evolvendi.

Poli igitur quaesiti tanquam puncta intersectionis trium superficierum secundi gradus determinantur, quarum indoles non tam ex natura baseos quam ex limitibus a, b, a', b' pendet. Etenim factores C membrorum secundi gradus omnes ex his tantum valoribus pendent. Iam cum pateat ex theoria aequationum generali, systemati (C) octo puncta satisfacere, apertum est numerum parem horum valorum imaginarem evadere posse; ita, ut polorum realium numerus semper par, aut duo aut quatuor aut sex aut octo exstet, prout superficiei basalis natura.

Iam si locum polorum reperire placet, qui volumen corporis pedalis constans exhibeant, aequationem statim statuere licet:

$$\text{Const.} = k' + \int_a^b \int_{a'}^{b'} \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\}^2$$

$$\left\{ r' - \tfrac{1}{3} \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\} \right\} \cos u \, du \, dv$$

aut valore Const. — k' littera λ designato:

$$1 = \int_a^b \int_{a'}^{b'} \frac{\cos u}{\lambda} \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\}^2 r' \, du \, dv$$

$$- \tfrac{1}{3} \int_a^b \int_{a'}^{b'} \frac{\cos u}{\lambda} \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\}^3 du \, dv$$

Hanc igitur solutis parenthesibus superficies accipit formam:

$$(E) \qquad 1 = Al^3 + Bm^3 + Cn^3 + 3Dlm^2 + 3Eln^2 + 3Flm^2 + 3Gmn^2 + 3Hnl^2 + 3Inm^2 + 6Knml + Ll^2 + Mm^2 + Nn^2 + 2Olm + 2Pln + 2Qmn;$$

sunt autem l, m, n coordinatae superficiei variabiles, quae ad polum minimi aut maximi α', β', γ' referuntur, quae superficies, cum sicut omnes spatii formae tertii gradus in infinitum extendantur, cum rei natura quadrare non videntur. Etenim polo in infinitum remoto volumen quoque infinitum reperiri putaris. Has autem superficies in partem spatii planis tangentibus repletam intrare oportet, ita ut polo quamvis in infinitum remoto, attamen differentia voluminum respondentium valor constans reddatur, licet utrumque per se infinitum evadat.

Iam si in aequatione illa $k = k'$ supponimus, aequationem (E) formam accipere patet:

$$0 = Al^3 + Bm^3 + Cn^3 + 3Dlm^2 + \ldots.$$

quae superficies cum per initium coordinatarum transeat hoc punctum tamquam singulare habet, atque isolatum, cum volumen respondens minus maiusve sit illo punctis vicinis correspondente. Apertum quoque est, plana tangentia puncto initiali correspondentia indeterminata restare, cum pro puncto $l=0$, $m=0$, $n=0$ differentialia partialia p atque q formam indeterminatam scilicet $\frac{0}{0}$ accipiant. Etenim

$$\frac{\partial E}{\partial l}, \frac{\partial E}{\partial m}, \frac{\partial E}{\partial n}$$

omnia nulla sunt. Facile igitur quoque est, systema aequationum aliorum polorum α', β', γ' sive superficierum tertii gradus punctis isolatis gaudentium proferre; etenim habemus sola differentiatione

$$\varphi' \begin{cases} 0 = 3Al^2 + 3Dm^2 + 3En^2 + 6Fml + 6Hnl + 6Knm + 2Ll + 2Om + 2Pn \\ 0 = 3Bm^2 + 6Dlm + 3Fl^2 + 3Gn^2 + 6Inm + 2Mm + 2Ol + 2Qn + 6Knl \\ 0 = 3Cn^2 + 6Eln + 6Gmn + 3Im^2 + 6Kml + 3Hl^2 + 2Nn + 2Pl + 2Qm \end{cases}$$

Habemus igitur superficies tres secundi gradus per unum polum transeuntes, quarum cetera intersectionis puncta alii poli α', β', γ' sunt. Punctis l', m', n' autem repertis, quae his aequationibus satisfaciunt, facile superficies tertii gradus, quarum puncta singularia sunt, ex aequatione (E) reperiri possunt.

Iam systema illud (φ') cum superiore:

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha} = 0; \frac{\partial k}{\partial \beta} = 0; \frac{\partial k}{\partial \gamma} = 0$$

aequivalere apertum est. Etenim cum coefficientes membrorum secundi ordinis cum terminis correspondentibus coincindant, directiones quoque axium principalium, quae ex his tantum valoribus pendent, coincidere necesse est. Iam igitur cum praeterea eadem octo puncta contineant, quae definiendis ceteris coefficientibus sufficiunt, dubitari non potest, quin easdem superficies secundi gradus ac supra obtineamus. Has autem axium principalium directiones ex limitibus a, b, a', b' tantum pendere manifestum est.

Ceterum iam ex superficierum tertii gradus definitione patet, se ipsas nullo modo secare posse, cum puncto determinato, determinatum quoque volumen respondeat.

Generaliora autem haec theoremata omittentes ad alia specialiora progredi liceat.

Talem enim superficiem aut superficiei partem supponimus, quae omnino conclusa sit, inque omnibus punctis curvaturam convexo-convexam exhibeat, ita ut cuivis plano tangenti unum tantum respondeat parallelum. Initio igitur coordinatarum in plagam interiorem superficiei posito directiones versus exterius latus tamquam positivas contemplari oportet. Polo igitur α', β', γ' in eadem interiore parte sito, omnes radii vectores superficiei pedalis positivi sunt, ita ut volumen totale semper positivum existat. Quodsi autem hoc volumen corporis totalis amplectimur, aut $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, a' = 0, b' = 2\pi$ supponimus, omnes coefficientes C illico evanescere apertum est. Quodsi autem polus

extra superficiem situs est, superficies pedalis, cum sit polus ipsius punctum restringens in duo pallia separata dirimitur, quorum alterum positivum, alterum negativum, ita ut differentia horum voluminum, volumen postulatum, minimum sit. Etenim per polum cono superficiem tangente posito, horum ipsorum planorum tangentium normales nullae sunt, eorum autem, quae parti baseos versus interiorem coni plagam spectanti respondent, negativae, ceterorum autem aversae partis positivae sunt.

Nihilo secius autem limites integrationis hoc quoque in casu $a + \frac{\pi}{2}$ usque ad $- \frac{\pi}{2}$ atque a 0 usque ad $+ 2\pi$ extendi possunt. Correspondent enim radii negativi illis directionibus, in aversam autem partem conducti, negativum accipiunt signum. Quamobrem hoc quoque poli situ integrare licet, tamquam radii in omnes directiones ducti essent. Sytema autem illud aequationum (E') (vide pag. 22) evanescentibus omnibus coefficientibus C in systema primi gradus pervertitur, ita ut unus tantum polus sit, qui volumen reddat minimum. Aequationes autem sunt:

$$\frac{P_1}{2} = P'_1\,\alpha' + P'_4\,\beta' + P'_6\,\gamma'$$

$$\frac{P_2}{2} = P'_4\,\alpha' + P'_2\,\beta' + P'_5\,\gamma'$$

$$\frac{P_3}{2} = P'_6\,\alpha' + P'_5\,\beta' + P'_3\,\gamma'$$

Determinans igitur systematis huius ea quam dicunt symmetrica est, quo fit, ut systema inversum in similem hanc formam facile redigatur:

$$\alpha'\,\Delta = \frac{P_1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_1} + \frac{P_2}{4}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_4} + \frac{P_3}{4}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_6}$$

$$\beta'\,\Delta = \frac{P_1}{4}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_4} + \frac{P_2}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_2} + \frac{P_3}{4}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_5}$$

$$\gamma'\,\Delta = \frac{P_1}{4}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_6} + \frac{P_2}{4}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_5} + \frac{P_3}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial P'_3}$$

est autem litera Δ, determinans symmetrica data, haec:

$$\Delta = P'_1\,P'_2\,P'_3 - P'_1\,P_5'^2 - P'_2\,P_6'^2 - P'_3\,P_4'^2 + 2P'_4\,P'_5\,P'_6$$

Quamobrem poli coordinatae α', β', γ' sine ulla ambiguitate constitutae sunt. Integrationis limitibus hoc modo a o usque ad 2π atque ab $-\frac{\pi}{2}$ ad $+\frac{\pi}{2}$ extensis formam valoris k diligentius inquirere operae pretium esse videtur. Iam quod attinet ad valorem k', minimum verum esse facile demonstratur. Primum enim volumen illud conis duobus superficiem pedalem in polo tangentibus interceptum positivum esse constat, ceteris autem directionibus elementa respondent, quae differentia duorum voluminis elementorum constituantur atque hanc ob rem omnes positivae evadunt, cum maiores radii vectores ex definitione nostra omnes positivi sint. Quamobrem, quibuslibet poli sitibus, volumen k' ex elementis omnibus positivis conflatum, positivum ipsum esse

negari non potest. Volumen autem generale k hanc aperte accipit formam, quoniam coefficientes literis C denominatae evanescunt:

$$k = k' + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos u \{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \}^2 du\, dv$$

Iam cum altera pars dextri lateris, eodem modo semper positiva sit, k' verum minimum necessario esse apparet. Directionibus enim oppositis oppositis quoque radiis vectoribus fruentibus, quorum negativus minor semper existat, uterque autem uno eodemque factore $\cos u\ (l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u)^2$ manifesto semper positivo multiplicatus sit, summam quoque positivam, id est, pro omnibus valoribus l, m, n:

$$k - k' = + D$$

essse patet, quamobrem k' semper minimum, quod erat demonstrandum.

Iam si locus eorum polorum requirendus est, qui aequa volumina corporum pedalium correspondentium exhibeant, ac si volumen illud constans litera k_0 designamus, supposito

$$k_0 > k'$$

quod solum cum rei natura quadrat, hanc statim aequationem nanciscimur:

$$k_0 - k' = \lambda = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} \{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \}^2 r' \cos u\, du\, dv \qquad \text{aut}$$

$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{l}{\sqrt{\lambda}} \cos u \cos v + \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \cos u \sin v + \frac{n}{\sqrt{\lambda}} \sin u \right\}^2 r' \cos u\, du\, dv$$

sive denique solutis parenthesibus:

$$S. \left\{ \begin{aligned} 1 = {} & \frac{l^2}{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos^3 u \cos^2 v\, du\, dv + \frac{m^2}{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos^3 u \sin^2 v\, du\, dv \\ & + \frac{n^2}{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} \sin^2 u \cos u\, r'\, du\, dv + \frac{2\,lm}{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos^3 u \cos v \sin v\, du\, dv \\ & + \frac{2\,lm}{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos^2 u \sin u \cos v\, du\, dv + \frac{2\,mn}{\lambda} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos^2 u \sin v \sin u\, du\, dv \end{aligned} \right.$$

quae integralia, cum contineant r', ex sola baseos indole adhuc pendent. Jam cum sint l, m, n coordinatae rectangulares variabiles, quarum initium polus α', β', γ' notum sit, quarumque directiones cum axibus primitivis rectangularibus parallelae sint, locum punctorum α, β, γ idem volumen k_0 afferentium superficiem secundi gradus esse demonstratum est. Cum autem aequatio illa membris primi ordinis careat, iam a priori constat, superficies esse illius generis, quae centro gaudeant, atque omnium centrum commune polum minimi α', β', γ' existere; cum porro superficies valore finito k_0 puncta in infinitum remota habere non possit, illo systemate (S) ellipsoidas tantum contineri appatet.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} r' \cos u \left\{ l \cos u \cos v + m \cos u \sin v + n \sin u \right\}^2 du\, dv$$

enim valoribus l, m, n crescentibus valorem semper maiorem accipere facile demonstratur. Solus denique cum parameter λ, variato volumine k_0 varietur, e principiis illarum superficierum theoriae, haec theoremata profluunt. Si k_0 omnes valores ab k' usque ad ∞ adipiscitur, loci polorum pretio cuique voluminis correspondentium, systema ellipsoidarum constituunt, quae eodem centro α', β', γ' gaudent, quarumque axes principales in iisdem lineis positi sunt. Iam restat nobis axium situm eorumque relationes constituere. Ex aequationibus autem transformationis, si littera A, B, C, D, E, F coefficientes illius aequationis denominamus, coordinatis vero ad axes principales ipsos relatis A', B', C', has aequationes constitui cognitum est:

$$\frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda} + \frac{C}{\lambda} = A' + B' + C'$$

$$\frac{AC}{\lambda^2} + \frac{AB}{\lambda^2} + \frac{BC}{\lambda^2} - \frac{D^2}{\lambda^2} - \frac{E^2}{\lambda^2} - \frac{F^2}{\lambda^2} = A'B' + A'C' + B'C'$$

$$\frac{ABC}{\lambda^3} + \frac{CF^2}{\lambda^3} - \frac{BE^2}{\lambda^3} - \frac{AD^2}{\lambda^2} + \frac{2DEF}{\lambda^2} = A'B'C'$$

ex quibus aequationibus cum λ solum sit variabile, A', B', C' quoque fracturas esse, quarum numerator constans, denominator vero λ sit, atque hanc ob rem axes ipsos pretio $\sqrt[2]{\lambda}$ proportionales esse, facile colligitur. Directio autem ipsorum hoc aequationum systemate eruenda est:

$$0 = Aa'a'' + Bb'b'' + Cc'c'' + D(b''c' + b'c'') + E(a'c'' + a''c') + F(a'b'' + b'a'')$$
$$0 = Aaa'' + Bbb'' + Ccc'' + D(b''c + bc'') + E(ac'' + a''c) + F(ab'' + a''b)$$
$$0 = Aaa' + Bbb' + Ccc' + D(bc' + b'c) + E(ac' + a'c) + F(ab' + a'b)$$

Superficie denique cuiusvis naturae data initioque coordinatarum apte posito, si volumen totale corporis pedalis inquirendum sit, in tales partes basin primo separandam esse, ut radius vector r functio univalor (eindeutig) sit, manifestum est.

Valor autem totalis V ex summa expressionum K supra definitarum conflatus est, ita ut ceteris rebus iisdem restantibus coefficientes integrales summarum tantum formam accipiant. Conoque a polo α', β', γ' tamquam centro ad basin constructo signa voluminum singulorum sine ullo negotio cognosci possunt. Eandem autem formam ac K induit K'. Quod idem, de systemate quoque secundi gradus polum minimalem definiente valere appatet, ita ut eundem polorum α', β', γ' numerum, simileque systema superficierem tertii gradus adipiscamur. Singulis autem tantum casibus, qui ex superioribus facile eruendi sunt, de maximo aut minimo a priore diiudicari posse videtur. Velut si polus α', β', γ' ab eodem omnium planorum tangentium latere aut ab opposito situs sit, ac initium coordinatarum; etenim illum minimum quidem pretium, hunc autem maximum praestare manifestum est. Quodsi autem superficies ex superficiebus conclusis naturae supra definitae composita sit, unum tantum polum nanciscimur atque valoris semper minimi quidem, dum systema ellipsoïdarum concentricum puncta voluminis constantis continet.

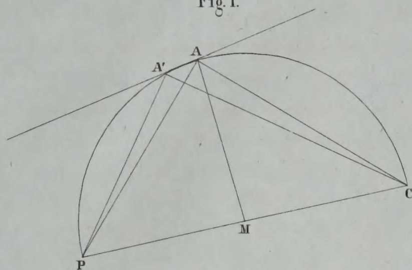
VITA.

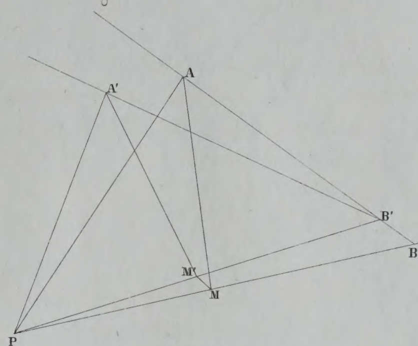
Gottfried Eduard Fischer Wanzlebiae, oppido prope Parthenopolin, die XXI mensis Maii anno MDCCCXXXV natus sum, patre Friderico, e consiliariis regiis, matre vero Elisabeth e gente Hoffmann, quibus vivis adhuc laetor. Fidem autem evangelicam profiteor.

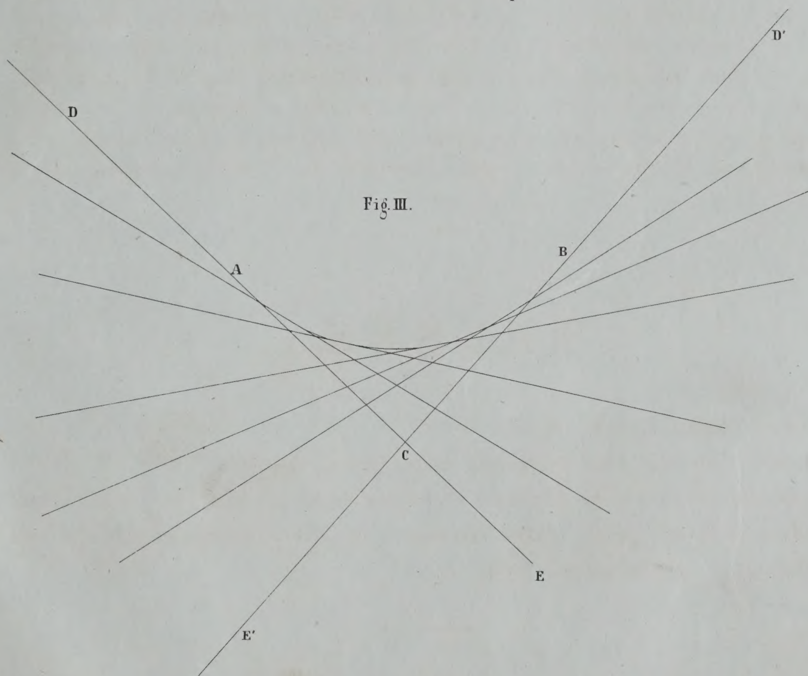
Primis litteris Parthenopoli imbutus, anno MDCCCXLVI in gymnasium cathedrale me contuli, quod floret in illa urbe, donec anno MDCCCXLIX Berolinum profectus in gymnasium Friderico-Guilelmum a viro Ill. Ranke receptus sum, quam scholam sex fere annos usque ad mensem Martis MDCCCLV frequentavi. Tum vero maturitatis testimonio instructus civibus academicis universitatis Fridericae Guilelmae Berolinensis a rectore Ill. Mitscherlich adscriptus sum, nomen decano Ill. Dove apud facultatem philosophicam profitens. Per haec autem octo semestria his scholis interfui: atque philosophicis quidem viri Ill. Trendelenburg; mathematicis Ill. Ill. Dirichlet, Kummer; Cel. Cel. Steiner, Weierstraſs; Exp. Arndt; physicis vero Ill. Magnus; Cel. Weierstraſs; Cel. Ermann; Cel. Poggendorf; astronomicis Ill. Encke de astronomia sphaerica planetarumque perturbationibus, chemicis denique Ill. Mitscherlich. Neque minus colloquia physica viri Ill. Magnus valde utilia mihi exstiterunt; quibus omnibus viris optime de me meritis gratias semper quam maximas agam, eodemque modo praeceptori carissimo Cel. Schellbach, consilio benevolentissimo tironem saepe adiuvanti.

THESES.

1. **Materiem continuam non esse.**
2. **Aetherem materiem esse specificam neque ponderabilem.**
3. **Hypothesin atomorum electricorum quamvis falsam nondum esse rejiciendam.**
4. **Nondum diiudicari posse, utrum vibrationes luminis polarisati in plano polarisationis an in plano normali fiant.**


Fig. I.
A
A'
C
M
P


Fig. II.
A
A'
B'
B
M'
M
P


D'
D
Fig. III.
B
A
C
E
E'